

# IL MISTERO ISOPERIMETRICO DI ZENODORO

GIAN PAOLO LEONARDI

## 1. INTRODUZIONE

In questo lavoro parleremo di una importante tradizione della matematica antica: le proprietà isoperimetriche dei poligoni regolari e del cerchio, ovvero che *il cerchio ha area maggiore di qualsiasi poligono regolare di equal perimetro* e che, a loro volta, *i poligoni regolari hanno area massima tra tutti i poligoni con ugual perimetro e numero di lati*. La dimostrazione di tali proprietà è attribuita al matematico e astronomo Zenodoro, attivo probabilmente ad Atene nella prima metà del II secolo a.C., durante la prima fase del declino della civiltà ellenistica che aveva raggiunto il suo apice nel corso del III secolo a.C. ([Too72]).

Nella sezione 2 sono riportate alcune informazioni finalizzate ad un minimo inquadramento storico sia del periodo ellenistico, al quale Zenodoro appartiene, sia dei periodi successivi, nei quali la civiltà ellenistica, assieme alle conoscenze scientifiche e tecniche da essa sviluppate, subì profonde e drammatiche trasformazioni. Successivamente presenteremo uno schema delle fonti antiche, nelle quali è riportata la dimostrazione isoperimetrica di Zenodoro: tre di queste sono giunte sino a noi, è quindi grazie ad esse che possiamo ricostruire con notevole precisione i dettagli di tale dimostrazione.

La sezione 3 è interamente dedicata alla descrizione della dimostrazione originale di Zenodoro, o più precisamente della sua ricostruzione, come risulta dal confronto testuale delle tre fonti esistenti.<sup>1</sup> Tale dimostrazione, la cui eleganza è indubbia, viene suddivisa in vari passaggi: alcuni di questi (precisamente, le Proposizioni 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10) costituiscono i passi più originali della dimostrazione, mentre le Proposizioni 3 e 6 ed il Lemma 1 (pur necessari al completamento della prova) sono risultati ben noti a quei tempi. Discuteremo invece a parte la Proposizione 9, che comunque non è indispensabile al completamento della prova.

Infine nella sezione 4 ci occuperemo di un punto cruciale della dimostrazione di Zenodoro, contenuto nella Proposizione 7. Ad esso è legata la storia di un tentativo infruttuoso condotto da un importante matematico del IV secolo d.C., autore di una delle tre fonti antiche sul problema isoperimetrico. Proprio in questo punto si nascondono un passaggio matematico “miracoloso” ed una configurazione geometrica realizzata da una particolare coppia di triangoli isosceli, la cui ottimalità verrà dimostrata ricorrendo ai metodi moderni del calcolo differenziale. La possibilità di una dimostrazione sintetica (in particolare, basata esclusivamente sugli strumenti a disposizione degli scienziati ellenistici) costituisce ancora oggi un problema aperto.

## 2. ALCUNI CENNI STORICI

Zenodoro, l'autore della dimostrazione isoperimetrica della quale parleremo più in dettaglio nella sezione 3, visse durante le fasi conclusive di quello che, secondo vari studiosi (si veda in particolare [Rus01]), può essere considerato il periodo di massima fioritura

---

Data: 4 novembre 2014.

<sup>1</sup>Il lavoro fondamentale a cui facciamo riferimento per tale ricostruzione è [Kno89].

delle scienze antiche: l'Ellenismo. Per maggiore precisione, d'ora in poi ci riferiremo a questo periodo come al *primo periodo ellenistico* (o ellenistico greco) comprendente tutto il III secolo a.C. e la prima metà del II secolo a.C., mentre parleremo di *secondo periodo ellenistico* (o ellenistico romano) riferendoci all'intervallo temporale che va dalla metà del II secolo a.C. al V secolo d.C.<sup>2</sup>

Le conquiste scientifiche e tecnologiche raggiunte nel corso del III secolo a.C. dalla civiltà ellenistica furono indubbiamente di altissimo livello, basti pensare alle opere e ai risultati di Archimede, di Eratostene, di Aristarco e di Apollonio. In realtà l'elenco dovrebbe continuare, essendoci arrivate testimonianze indirette dell'attività di molti altri scienziati di indubbio valore, le cui opere sono però andate completamente perdute e delle quali si hanno solo pochi riferimenti in autori successivi [Rus01]. Le profonde trasformazioni politiche e sociali che investirono il Mediterraneo tra il II secolo a.C. e il V secolo d.C. sono considerate la causa principale della perdita di gran parte del patrimonio scientifico del primo periodo ellenistico, avvenuta in maniera repentina durante le fasi cruciali dell'espansione di Roma nel Mediterraneo.<sup>3</sup> Nei primi secoli dell'Impero Romano, le scuole ellenistiche ancora in attività - tra cui Alessandria - dopo le distruzioni prodotte dalle guerre di conquista riprendono parzialmente la loro attività; si creano quindi le condizioni per un certo recupero culturale e scientifico, che culminerà con l'opera astronomico-matematica di Claudio Tolomeo, l'*Almagesto*, nel II secolo d.C. (si veda ad es. [Hei98, Too98]).

Tuttavia, il destino della scienza ellenistica era ormai segnato: con il declino dell'Impero Romano, iniziato già con la crisi politico-militare ed economica del III secolo d.C., e proseguito fino alla sua formale conclusione nel V secolo d.C.,<sup>4</sup> le difficoltà per le comunità ellenistiche superstiti si acuiscono sempre più, anche a causa dei sempre più frequenti scontri etnico-religiosi tra greci e cristiani.<sup>5</sup>

Solo a seguito di una lenta ripresa, nella quale ebbero un ruolo fondamentale i contatti tra l'Occidente e la civiltà araba,<sup>6</sup> si rese possibile quella rinascita culturale che, nei suoi aspetti scientifici, porterà alla rivoluzione copernicana nel '500, al metodo scientifico di Galileo nel '600 ed ai progressi di Newton e Leibnitz nel '700. Come sostiene Russo

---

<sup>2</sup>Proponiamo qui questa distinzione in riferimento alla diversa produzione di sapere scientifico sviluppatasi nei periodi all'incirca precedente e successivo al I secolo a.C., ovvero all'inizio dell'Impero Romano, per un arco di tempo complessivo che va dal III secolo a.C. al V secolo d.C. (si veda [ABBDV83] e [Rus01]). L'inclusione della prima metà del II secolo a.C. nel primo periodo ellenistico, ma non della seconda metà, è giustificata da un evento particolarmente importante, ovvero il colpo inferto alla *élite* greca di Alessandria, e quindi alla omonima scuola scientifico-filosofica, da parte di Tolomeo VIII (Evergete II) in occasione del suo insediamento al trono nel 145 a.C.

<sup>3</sup>Nel 212 a.C. avviene un fatto emblematico per il successivo declino della scienza ellenistica: Archimede viene ucciso durante l'assedio di Siracusa per mano di un soldato romano al servizio del console Marcello.

<sup>4</sup>La fine dell'Impero Romano è simbolicamente datata nel 476 d.C., anno in cui l'ultimo imperatore romano, Romolo Augusto, viene deposto dal generale germanico - poi re - Odoacre.

<sup>5</sup>Nel 415 d.C. ha luogo un'altra, emblematica uccisione: Ipazia, figlia di Teone ed ultima docente di matematica ed astronomia della scuola ellenistica di Alessandria, nonché esponente della corrente filosofica neo-platonica, viene barbaramente trucidata da un gruppo di cristiani spalleggiati dal vescovo di Alessandria, Cirillo [BT97].

<sup>6</sup>La prima traduzione in latino degli *Elementi* di Euclide, a partire da una copia scritta appunto in arabo, compare intorno al 1120 ad opera del monaco britannico Adelardo di Bath. Un secolo più tardi, Fibonacci scrive il *Liber Abaci*, una raccolta di conoscenze di matematica applicata tratte dalla scienza araba (quindi principalmente aritmetica e algebra), grazie al quale, come è noto, viene importata in Europa la numerazione posizionale, il numero zero, ed una serie di metodi di calcolo in larga misura basati sulla teoria delle proporzioni e sugli algoritmi euclidei.

[Rus01], tali conquiste possono essere considerate in larga misura come una “riscoperta” delle antiche scienze ellenistiche.<sup>7</sup>

Torniamo ora a parlare di Zenodoro e forniamo ulteriori dettagli storici sul personaggio. Un’interessante ricostruzione della figura dello scienziato Zenodoro è dovuta a Toomer [Too72]. Dalla scrupolosa analisi di Toomer<sup>8</sup> emerge che Zenodoro si sia formato ed abbia operato nella prima metà del II secolo a.C. presso la scuola ellenistica epicurea di Atene. Zenodoro viene collocato fra i cosiddetti *successori dei grandi geometri*,<sup>9</sup> delle cui opere si hanno solo (poche) notizie indirette.

L’opera forse più importante di Zenodoro è il trattato perduto *Sulle figure isoperimetriche*, contenente in particolare la dimostrazione delle proprietà isoperimetriche dei poligoni regolari e del cerchio. D’ora in poi, seguendo la notazione introdotta da Knorr [Kno89], la indicheremo con **Z\*** (l’asterisco indica che l’opera, o più in generale la fonte, è perduta). È bene sottolineare come quella di Zenodoro sia la prima opera scientifica dedicata al problema isoperimetrico, della quale si abbiano notizie storiche certe. Precedente a tale opera è solo la tradizione leggendaria legata alla figura della regina Didone.<sup>10</sup> Tuttavia a tale leggenda non corrispondono testimonianze di trattati filosofico-scientifici sull’argomento che risultino antecedenti a quello di Zenodoro. Che al termine del III secolo a.C. sia emerso il bisogno, da parte degli scienziati dell’epoca, di trattare il problema isoperimetrico (in altri termini, che i tempi fossero maturi per questo), sembra abbastanza ragionevole se si tiene presente la popolarità che in quel periodo dovette avere l’opera di Archimede *Sulla misura del cerchio*, nella quale tra le altre cose era provata la fondamentale relazione che fornisce la doppia area di un cerchio come prodotto del perimetro per il raggio.

Purtroppo nessuna delle opere di Zenodoro ci è pervenuta, come peraltro accaduto a quelle di tanti altri scienziati dell’epoca [Rus01]. Tuttavia, il contenuto del trattato

---

<sup>7</sup>Sulla stessa linea Knorr, nell’appendice alla riedizione dell’*Archimedes* di Dijksterhuis [Dij87], afferma: “The leading scientists - one may think of Stevin, Galileo, Kepler, Huygens, and Newton - were firmly grounded in the study of the ancients. Galileo’s *Two New Sciences* and Newton’s *Principia*, for instance, drew from the Euclidean-Archimedean model the essential elements of their expository form”. Lo stesso Knorr sottolinea che Dijksterhuis era particolarmente critico verso l’impostazione della “scienza antica”, soprattutto per quel che attiene al legame - secondo Dijksterhuis, di eccessiva sudditanza - delle scienze applicate rispetto alla geometria formale euclidea; ciononostante, i suoi studi sulla geometria ellenistica hanno messo in evidenza il grande debito della scienza e della tecnologia moderne nei confronti di quella di Euclide e Archimede.

<sup>8</sup>Per avvalorare la sua tesi, Toomer fa riferimento a studi onomastici e a diverse fonti, tra cui un papiro ritrovato a Ercolano (il n.1044) nel quale la figura di Zenodoro viene messa in relazione al filosofo epicureo Filonide, ed una traduzione araba del trattato di Diocle *Sugli specchi ustori*, nella quale è riportata la seguente frase: “quando l’astronomo Zenodoro scese in Arcadia e si presentò a noi, ci chiese quale fosse la forma di uno specchio che, una volta posto di fronte ai raggi del sole, li rifletta concentrandoli in un punto”.

<sup>9</sup>Seguendo Heath [Hea21], i *grandi geometri* del (primo) periodo ellenistico sono identificabili con Euclide, Archimede e Apollonio.

<sup>10</sup>La celebre leggenda di Didone, come ad esempio ci viene raccontata da Virgilio nell’*Eneide*, parla di questa regina (Didone, o *Elissa*, sorella del re di Tiro, Pigmalione, e vissuta probabilmente nel IX secolo a.C.) la quale, profuga da Tiro, approda sulle coste dell’attuale Libia e, dopo una trattativa non del tutto amichevole con il sovrano locale Iarba, riceve in sfida una pelle di vacca con cui recingere il proprio territorio; Didone fa tagliare la pelle in tante strisciole sottili, le annoda e forma così una corda lunghissima, con la quale recinge un ampio pezzo di terra adiacente alla costa e di forma semicircolare (corrispondente alla soluzione del problema isoperimetrico nel semipiano). La fonte più antica, di cui si abbiano notizie e nella quale sia stata riportata la leggenda di Didone, è della seconda metà del IV secolo a.C., ad opera dello storico greco Timeo.

di Zenodoro può essere almeno in parte ricostruito grazie all'integrazione di tre fonti successive, giunte sino a noi e che ne presentano i risultati principali. Tali fonti<sup>11</sup> sono

**PI**: la prima sezione del libro V delle Collezioni di Pappo (si veda in particolare [Hul78]);

**TI**: un trattato nel commentario di Teone al I libro dell'Almagesto di Tolomeo<sup>12</sup> (si veda [Rom36], pp. 355-379).

**AI**: un trattato anonimo del V secolo d.C., contenente prolegomeni all'Almagesto<sup>13</sup> (si veda [Hul78], vol.III pp. 1138-1165).

Pappo e Teone sono attivi nel IV secolo d.C. ad Alessandria, come docenti presso l'omonima scuola. È inoltre plausibile supporre che Teone sia di poco successivo a Pappo.

Secondo Knorr [Kno89], dal confronto testuale delle tre fonti **PI**, **TI** e **AI** si ottiene la conferma dell'esistenza, oltre che del trattato **Z\***, di due fonti intermedie **PI\*** e **AI\***: rispettivamente, un commentario di Pappo sul I libro dell'Almagesto e una fonte anonima, dalla quale **AI** avrebbe mediato il contenuto di **Z\***, secondo due probabili schemi (vedi Figura 1, come in [Kno89] p.725).<sup>14</sup>

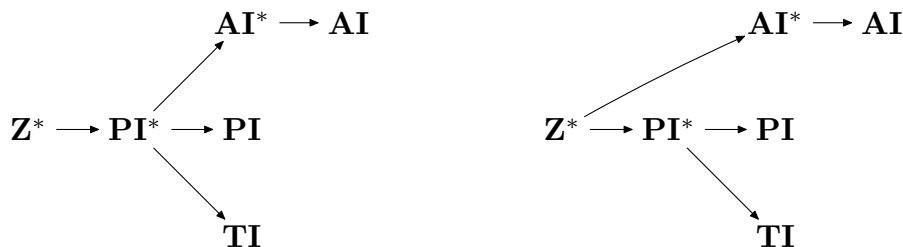


FIGURA 1. Due possibili schemi relazionali tra le fonti (superstiti e non) che presentano il problema isoperimetrico.

Ricapitolando, nella *timeline* seguente abbiamo riportato a grandi linee i periodi storici dall'Ellenismo fino all'Ottocento, collocando alcuni personaggi di riferimento, al fine di offrire un'idea approssimativa sia dell'evoluzione storica sopra accennata, sia della collocazione temporale dei personaggi più direttamente legati alla matematica del problema isoperimetrico (visibili in grassetto). Si noti in particolare come l'interesse moderno per i problemi isoperimetrici riemerge solo contemporaneamente alla nascita del calcolo delle variazioni con i fratelli Bernoulli alla fine del 1600,<sup>15</sup> dopo un sostanziale silenzio di ben 13 secoli! Si aggiunga a questo il fatto che la prima trattazione "geometrica" moderna (potremmo dire, nello stile degli antichi geometri) del classico problema isoperimetrico nel piano è solo del 1842, ad opera di Jacob Steiner. Possiamo quindi affermare che la prima, significativa generalizzazione delle idee geometriche contenute nel trattato di Zenodoro sia stata ottenuta ben 2000 anni più tardi!

<sup>11</sup>Qui adottiamo nuovamente la notazione di Knorr [Kno89].

<sup>12</sup>Theon Alexandrinus. In Claudii Ptolemaei Magnam Constructionem Commentariorum Lib. XI, ed. 1. Camerarius, Basel: 1. Walder, 1538.

<sup>13</sup>*Prolegomena tes tou Ptolemaiou megales syntaxeos*: Vat. ms. gr. 1594 (Vaticano, sec. X d.C.), f. lr-9r; Marc. ms. gr. 313 (Venezia, sec. X d.C.), f. lr-28r; B.N. ms. gr. 2390 (Parigi, sec. XIII d.C.), f. lr-13v.

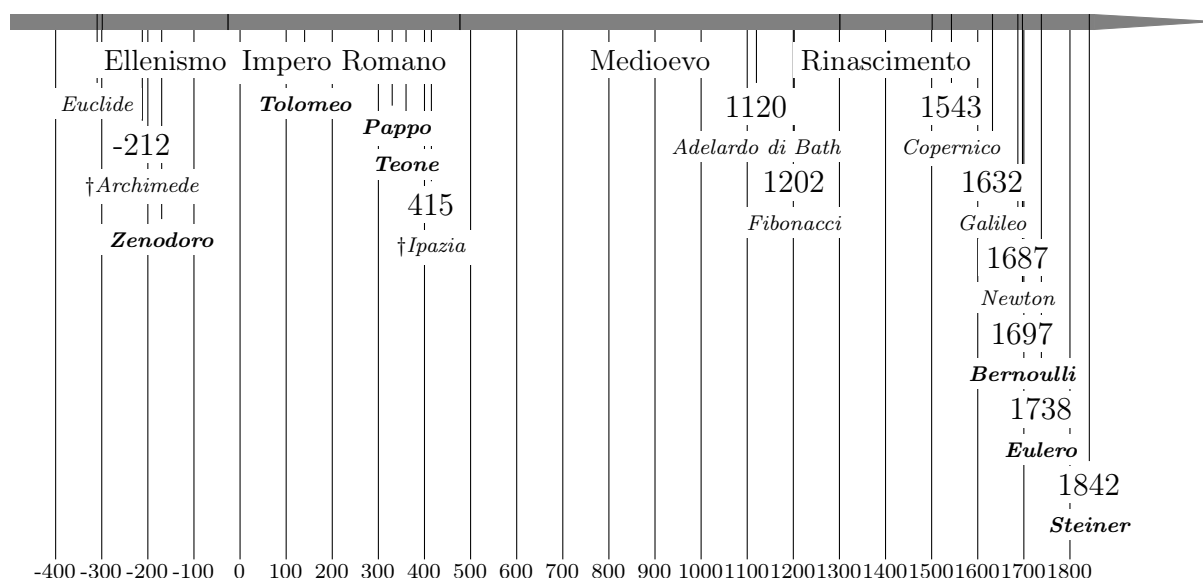
<sup>14</sup>Il principio filologico fondamentale applicato in questo tipo di ricostruzioni è ben sintetizzato da un passo di Moritz Cantor, titolare della prima cattedra di Storia della Matematica in Germania: "estratti che utilizzano termini quasi identici, in autori quasi contemporanei, che quindi certamente non potevano copiarsi l'un l'altro, devono essere molto vicini all'originale".

<sup>15</sup>Nel corso del 1700 il calcolo delle variazioni ricevette un grande impulso grazie ai lavori di Lagrange ed Eulero.

Sopra alcuni dei nomi che compaiono nella *timeline* sono riportate delle date. Nel caso di Archimede e di Ipazia, tali date sono quelle di morte, qui riportate come fatti emblematici di passaggi storici particolarmente rilevanti. Negli altri casi abbiamo scelto una data corrispondente ad un'opera importante del relativo personaggio. Nel 1120, ad opera di Adelardo di Bath, compare la prima edizione latina degli *Elementi* di Euclide, tradotti da una fonte araba. Nel 1202 Fibonacci scrive il *Liber abaci*. Nel 1543 viene pubblicato il celebre trattato di Copernico, intitolato *De revolutionibus orbium coelestium*. Nel 1632 Galileo pubblica il suo *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*, mentre nel 1687 Newton pubblica i *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Nel 1697 Johann Bernoulli formula il problema della *brachistocrona* (si veda ad es. [Gol80]). In una memoria del 1738, Eulero, basandosi sulle ricerche dei fratelli Bernoulli, pone le basi del moderno calcolo delle variazioni<sup>16</sup> (si veda in particolare [Fra92]). Infine, nel 1842 Steiner pubblica in [Ste38] la sua soluzione<sup>17</sup> del problema isoperimetrico nel piano, inaugurando i moderni metodi geometrici per affrontare questa tipologia di problemi (fra questi, una fondamentale tecnica di *simmetrizzazione* che oggi porta il suo nome).

-500

1850



### 3. IL TEOREMA ISOPERIMETRICO DI ZENODORO

In questa sezione presentiamo la dimostrazione del teorema isoperimetrico di Zenodoro, che afferma: *fra i poligoni aventi ugual perimetro, quelli regolari hanno area massima e il cerchio ha area maggiore di ogni poligono di egual perimetro*. Pur adottando una impostazione ed un linguaggio moderni (per una trattazione particolarmente curata negli aspetti didattici, si veda [LT09]), presentiamo qui gli enunciati e gli schemi dimostrativi che, dal confronto delle tre fonti **PI**, **TI** e **AI**, possono essere considerati come i più aderenti all'opera perduta **Z\***. Per comodità del lettore, forniamo qui di seguito uno schema dei

<sup>16</sup>Eulero dimostra in particolare la condizione necessaria di ottimalità, oggi nota come *Equazione di Eulero-Lagrange*.

<sup>17</sup>La dimostrazione di Steiner, così come quella di Zenodoro, non è del tutto rigorosa in quanto suppone implicitamente l'esistenza di figure ottimali.

passi fondamentali che compongono la dimostrazione del teorema isoperimetrico (l'ordine rispecchia quello seguito da Pappo in **PI**<sup>18</sup>):

- Proposizione 1: se due poligoni regolari hanno equal perimetro, quello con più lati ha area maggiore;
- Lemma 1 (Lemma delle tangenti): in termini più moderni, se  $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$  allora  $\frac{\tan \beta}{\tan \alpha} > \frac{\beta}{\alpha}$ ;
- Proposizione 2: un cerchio ha area maggiore di qualunque poligono regolare di equal perimetro;
- Proposizione 3 (Teorema di Archimede): il prodotto del perimetro di un cerchio per il suo raggio è pari a due volte l'area (in altri termini, un cerchio equivale ad un triangolo di base pari alla misura della sua circonferenza e di altezza pari al suo raggio);
- Proposizione 4: costruibilità del triangolo isoscele isoperimetrico ad un triangolo dato, sopra un fissato lato di base;
- Proposizione 5: fra tutti i triangoli isoperimetrici di equal base, quello isoscele ha area massima;
- Proposizione 6: teorema di Pitagora “in versione di somma” per due triangoli rettangoli simili:  $(a + a')^2 + (b + b')^2 = (c + c')^2$ .
- Proposizione 7: ottimalità della coppia di triangoli isosceli simili costruiti su due fissate basi.
- Proposizione 8: costruzione relativa alla Proposizione 7.
- Proposizione 10: tra tutti i poligoni di equal perimetro e numero di lati, quelli regolari (equilateri ed equiangoli) hanno area maggiore.

Come si può notare, nello schema manca la Proposizione 9, che in seguito denoteremo come Proposizione 9\* in quanto perduta. Tale proposizione è solamente annunciata in **PI** a proposito di una certa proprietà delle proporzioni composte, ma non scritta esplicitamente, né tantomeno dimostrata. Di essa parleremo nella sezione 4.

Si noti che, combinando la Proposizione 10 con la Proposizione 2, si deduce *il cerchio ha area maggiore di un qualunque poligono ad esso isoperimetrico*. Inoltre, è opportuno osservare che la trattazione del problema esclude i poligoni non convessi: del resto, è facile ridurre il problema isoperimetrico piano al caso convesso, quindi è anche probabile che i poligoni non convessi fossero considerati evidentemente non ottimali, o comunque non rilevanti per il problema.

**Proposizione 1.** *Se due poligoni regolari hanno equal perimetro, quello con più lati ha area maggiore.*

*Dimostrazione.* Siano  $ABG$ ,  $DEZ$  due poligoni regolari isoperimetrici, rispettivamente di  $n$  e  $m$  lati,  $n < m$  (vedi<sup>19</sup> Figura 2). Dato che  $n < m$ , risulta

$$\widehat{AHG} = \frac{2\pi}{n} > \frac{2\pi}{m} = \widehat{D\theta Z} \quad \text{e} \quad AG > DZ.$$

<sup>18</sup>Si tenga presente che **PI**, a differenza delle fonti **TI** e **AI**, sceglie di posporre - anziché anteporre, come sarebbe nell'ordine logico più naturale - la Proposizione 8 di “costruibilità” della coppia di triangoli isosceli simili, precedentemente utilizzata nella Proposizione 7.

<sup>19</sup>Abbiamo sostanzialmente adottato la simbologia della traslitterazione latina, scritta a partire dall'originale in greco, in tutte le figure qui presentate. Questo spiega l'ordine “insolito” delle lettere  $A, B, G, D, E, Z, H, \theta, K, L, M, N, \dots$ : infatti la  $G$  traslittera la terza lettera dell'alfabeto greco, ovvero la  $\Gamma$ , e via dicendo (con l'eccezione della  $\theta$ , non traslitterata).

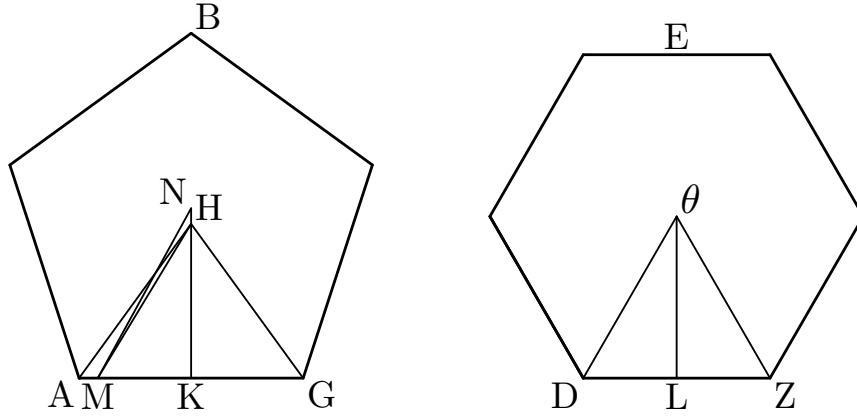


FIGURA 2. Confronto tra le aree di due poligoni regolari isoperimetrici.

Inoltre, dall'eguaglianza dei perimetri si deduce che

$$(1) \quad \frac{AK}{MK} = \frac{AK}{DL} = \frac{AG}{DZ} = \frac{m}{n} = \frac{\widehat{AHG}}{\widehat{D\theta Z}},$$

dove con  $M$  abbiamo indicato l'unico punto del segmento  $AK$  tale che  $MK = DL$ . D'altra parte, per il Lemma 1 seguente, si ha che

$$(2) \quad \frac{AK}{MK} > \frac{\widehat{AHK}}{\widehat{MHK}},$$

per cui combinando (1) e (2) si ottiene

$$\frac{\widehat{AHK}}{\widehat{MHK}} < \frac{\widehat{AHG}}{\widehat{D\theta Z}} = \frac{\widehat{AHK}}{\widehat{D\theta L}}$$

da cui segue immediatamente

$$(3) \quad \widehat{MHK} > \widehat{D\theta L}.$$

Sia ora  $N$  fissato sulla semiretta uscente da  $K$  verso  $H$ , in maniera tale che  $NK$  sia congruente a  $L\theta$ . Dato che i due triangoli  $MHK$  e  $MNK$  sono rettangoli ed hanno un cateto in comune, la disuguaglianza (3) implica che

$$HK < NK = \theta L.$$

Si deduce pertanto che la doppia area del poligono di  $n$  lati  $ABG$ , essendo pari al prodotto del perimetro per l'apotema  $HK$ , è necessariamente inferiore alla doppia area del poligono di  $m > n$  lati  $DEZ$ , come volevasi dimostrare.  $\square$

**Lemma 1** (Lemma delle tangenti). *Sia  $E\theta L$  un triangolo rettangolo in  $L$ , e sia  $M$  un punto interno al cateto  $EL$ . Si ha*

$$(4) \quad \frac{EL}{ML} > \frac{\widehat{E\theta L}}{\widehat{M\theta L}}.$$

Ci sembra opportuno fare una breve premessa alla dimostrazione del Lemma 1. Tale dimostrazione viene presentata in **TI** e **AI**, ma non in **PI** dove invece Pappo rimanda a un lemma contenuto in un suo commentario alle *Sferiche* di Teodosio. D'altra parte il

Lemma 1 afferma una disuguaglianza “classica” tra il rapporto di due tangenti e quello dei rispettivi angoli:

$$(5) \quad \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} > \frac{\alpha}{\beta} \quad \forall 0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Tale proprietà era già stata discussa nel trattato di Euclide sull’*Ottica* ed applicata sia da Aristarco (il padre della teoria eliocentrica) nel suo trattato *Sulla grandezza e distanza del Sole e della Luna*, sia da Archimede nell’*Arenario*. Un metodo per provare la (5) è il seguente: si osserva che per  $0 < t < \frac{\pi}{2}$  vale

$$\frac{d}{dt} \frac{\tan t}{t} = \frac{1}{t \cos^2 t} - \frac{\sin t}{t^2 \cos t} = \frac{2t - \sin(2t)}{2t^2 \cos^2 t} > 0,$$

il che mostra che  $\frac{\tan t}{t}$  è crescente su tale intervallo, da cui la (5) segue immediatamente. Ci sembra d’altro canto doveroso proporre una dimostrazione puramente “geometrica” della (4), per rispetto allo stile dell’epoca. Tale dimostrazione si basa sulla Figura 3 presente in **TI** e **AI**.

*Dimostrazione del Lemma 1.* Si determinano i punti  $N$  e  $X$  di intersezione della circonferenza di centro  $\theta$  e raggio  $\theta M$  con le semirette  $\theta \vec{E}$  e  $\theta \vec{L}$ , come in Figura 3. Si osserva quindi che

$$\frac{EL}{ML} = \frac{\text{area}(EL\theta)}{\text{area}(ML\theta)}.$$

D’altra parte, essendo tale rapporto maggiore di 1, se ad entrambe le aree aggiungiamo una stessa quantità (nella fattispecie, l’area della figura curvilinea  $MXL$ ) il rapporto diminuisce:

$$\frac{\text{area}(EL\theta)}{\text{area}(ML\theta)} > \frac{\text{area}(EL\theta) + \text{area}(MXL)}{\text{area}(ML\theta) + \text{area}(MXL)} = \frac{\text{area}(EMX\theta)}{\text{area}(MX\theta)}.$$

Osserviamo poi che  $\text{area}(EMX\theta) > \text{area}(NX\theta)$  e che  $\frac{\text{area}(NX\theta)}{\text{area}(MX\theta)} = \frac{\widehat{E\theta L}}{\widehat{M\theta L}}$ , quindi concludiamo

$$\frac{EL}{ML} = \frac{\text{area}(EL\theta)}{\text{area}(ML\theta)} > \frac{\text{area}(EMX\theta)}{\text{area}(MX\theta)} > \frac{\text{area}(NX\theta)}{\text{area}(MX\theta)} = \frac{\widehat{E\theta L}}{\widehat{M\theta L}},$$

ovvero la tesi del lemma. □

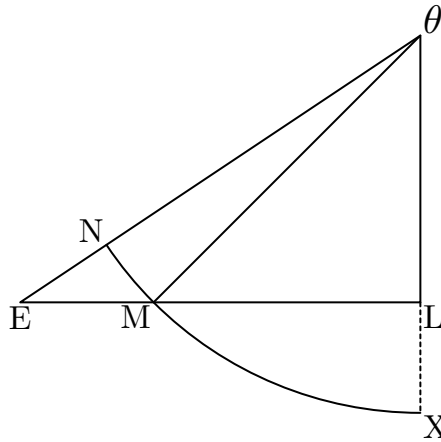


FIGURA 3. Il lemma delle tangenti.



**Proposizione 2.** *Un cerchio ha area maggiore di qualunque poligono regolare ad esso isoperimetrico.*

*Dimostrazione.* Sia  $ABG$  un poligono regolare di  $n$  lati e sia  $\mathcal{C}$  un cerchio ad esso isoperimetrico. Denotiamo con  $p$  la misura del perimetro di tale cerchio. Costruiamo il poligono regolare  $DEZ$  di  $n$  lati di cui  $\mathcal{C}$  è il cerchio inscritto (si veda la Figura 4). Chiaramente, il perimetro di  $\mathcal{C}$  è inferiore al perimetro di  $DEZ$ , quindi l'apotema  $HK$  di  $ABG$  dovrà necessariamente essere inferiore all'apotema  $\theta L$  di  $DEZ$ , in quanto sussiste una corrispondente disuguaglianza tra i perimetri dei due poligoni. D'altra parte  $\theta L$  è un raggio del cerchio, quindi grazie al Teorema di Archimede (Proposizione 3 seguente) si ha

$$\text{area}(ABG) = \frac{1}{2}p \cdot HK < \frac{1}{2}p \cdot \theta L = \text{area}(\mathcal{C}),$$

il che conclude la dimostrazione. □

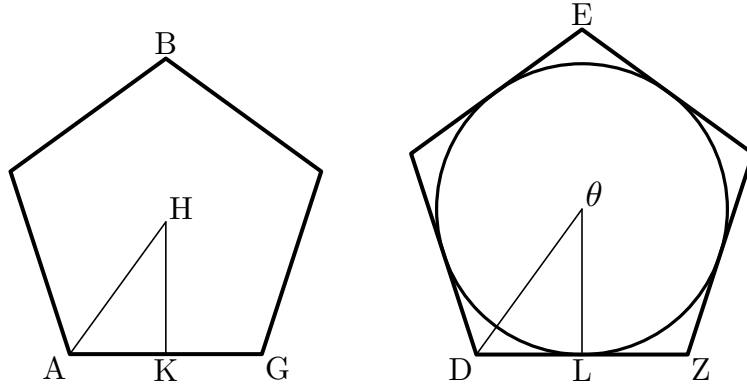


FIGURA 4. Il cerchio ha area maggiore di ogni poligono regolare isoperimetrico.

**Proposizione 3** (Teorema di Archimede). *Il prodotto del perimetro di un cerchio per il suo raggio è il doppio dell'area del cerchio.*

La dimostrazione della Proposizione 3, a sua volta richiamata nella dimostrazione della Proposizione 2, non è presente nelle tre fonti in quanto trattasi del noto teorema di Archimede sulla misura del cerchio, dimostrato attraverso il *metodo di esaustione*. Peraltro, in questo passo della dimostrazione, Archimede viene menzionato in maniera esplicita da tutti e tre i commentatori.

Nelle due proposizioni seguenti si discute in primo luogo la costruibilità del triangolo isoscele isoperimetrico ad un dato triangolo, sopra un fissato lato di base; in secondo luogo, la maggiore area del triangolo isoscele isoperimetrico a quello iniziale.

**Proposizione 4.** *Sia  $ABG$  un triangolo dato di base  $AB$ , non isoscele. Allora esiste un punto  $D$  tale che  $ABD$  è un triangolo isoscele isoperimetrico ad  $ABG$ .*

*Dimostrazione.* La prova risiede nell'applicazione dei teoremi sulla costruibilità dei triangoli, contenuti negli *Elementi* di Euclide. Infatti, se tre misure di lunghezze  $a, b, c$  verificano le *disuguaglianze triangolari strette*  $a < b + c$ ,  $b < a + c$  e  $c < a + b$ , allora esiste uno ed un solo triangolo i cui lati hanno esattamente quelle misure. Per applicare questo noto risultato al caso che ci interessa, è sufficiente porre  $a = AB$ ,  $l = AG$ ,  $m = BG$  e definire  $b = c = (l + m)/2$ , quindi si verifica che  $a, b, c$  soddisfano alle triangolari strette. □

**Proposizione 5.** *Sia  $DBG$  un triangolo dato di base  $BG$ , non isoscele. Allora il triangolo isoscele isoperimetrico  $ABG$  (cfr. Figura 5) ha area maggiore.*

*Dimostrazione.* Si supponga senza perdita di generalità che  $BD > GD$  e, tenendo presente la costruibilità del triangolo isoscele isoperimetrico  $ABG$  in virtù della Proposizione 4, si tracci la retta  $r$  parallela a  $BG$  passante per il punto  $A$  e si indichi con  $H$  il punto di intersezione tra  $r$  e la retta per  $DG$ . Si indichi infine con  $Z$  il punto simmetrico di  $G$  rispetto ad  $r$  (si noti che  $Z$  appartiene alla retta per  $AB$ ). Per dimostrare che  $\text{area}(DBG) < \text{area}(ABG)$  sarà sufficiente provare che  $\text{area}(DBG) < \text{area}(HBG)$ , il che è provato qualora si dimostri che  $D$  giace al di sotto della retta  $r$ , ovvero che

$$(6) \quad \widehat{GAD} < \widehat{GAH}.$$

A questo scopo osserviamo che per la disuguaglianza triangolare stretta applicata al triangolo  $ZDB$  (notare che  $D$  non può stare sulla retta per  $AB$ , altrimenti si avrebbe una violazione della condizione di isoperimetria) deve valere

$$ZD + DB > ZB = AB + AG = DB + DG,$$

il che implica

$$(7) \quad ZD > DG.$$

La (7) combinata con l'uguaglianza  $AZ = AG$  (valida per costruzione) implica a sua volta che

$$(8) \quad \widehat{ZAD} > \widehat{GAD}$$

(infatti è sufficiente confrontare le misure dei lati dei triangoli  $ZAD$  e  $GAD$  per dedurre la (8)). Infine, dalla (8) si ricava immediatamente la (6) osservando che  $\widehat{ZAD} + \widehat{GAD} = 2 \cdot \widehat{GAH}$ . Ciò conclude la dimostrazione.  $\square$

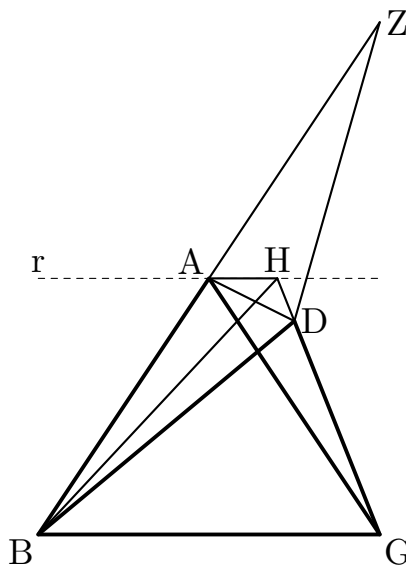


FIGURA 5. Un triangolo isoscele ha area maggiore di ogni altro triangolo isoperimetrico avente la stessa base.

Segue ora una proposizione che riguarda il teorema di Pitagora “in versione di somma” per una coppia di triangoli rettangoli simili.

**Proposizione 6.** *Siano  $ABG$  e  $A'B'G'$  due triangoli rettangoli simili, con angoli retti in  $B$  e  $B'$  e lati omologhi in proporzione. Allora vale*

$$(AB + A'B')^2 + (BG + B'G')^2 = (AG + A'G')^2.$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione è molto semplice sia per via analitico-algebrica, che per via geometrico-sintetica. Infatti se indichiamo con  $a, a'$  e  $b, b'$  le misure dei cateti corrispondenti e con  $c, c'$  le misure delle ipotenuse, avremo dalla similitudine

$$a' = ta, \quad b' = tb, \quad c' = tc$$

per un opportuno numero  $t > 0$ . Da ciò segue

$$(a + a')^2 + (b + b')^2 = (1 + t)^2(a^2 + b^2) = (1 + t)^2c^2 = (c + c')^2,$$

ovvero la tesi. In alternativa, per via sintetica il risultato si deduce dalla Figura 6, nella quale si osserva che traslando parallelamente  $BG$  e  $A'B'$  si costruisce un triangolo rettangolo i cui cateti e la cui ipotenusa sono somme dei corrispondenti cateti ed ipotenuse dei due triangoli iniziali.  $\square$

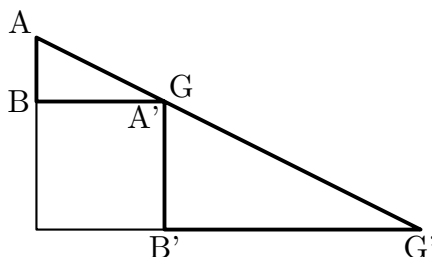


FIGURA 6. Il teorema di Pitagora in versione di somma.

Veniamo ora al punto cruciale di tutta la dimostrazione isoperimetrica, ovvero il contenuto della Proposizione 7.

**Proposizione 7.** *Siano  $AEB$  e  $GZD$  due triangoli isosceli di basi diseguali  $AB, GD$  e lati obliqui congruenti ( $AE = GZ$ ). Siano  $AXB$  e  $GND$  i due triangoli isosceli simili costruiti nella Proposizione 8 seguente. Allora si ha*

$$\text{area}(AXB) + \text{area}(GND) > \text{area}(AEB) + \text{area}(GZD).$$

*Dimostrazione.* Forniamo qui la dimostrazione della Proposizione 7, come riportata dalle fonti **TI** e **AI**. Supponiamo a meno di una traslazione che  $B = G$  e che le due basi  $AB$  e  $GD$  siano allineate e verifichino la disuguaglianza  $AB > GD$ , come in Figura 7. Indichiamo con  $L$  il punto simmetrico di  $Z$  rispetto alla retta  $AD$ , con  $M$  il punto di

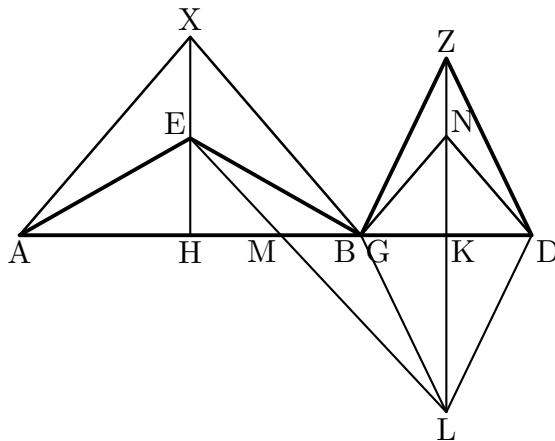


FIGURA 7. Due coppie isoperimetriche di triangoli isosceli a confronto.

intersezione del segmento  $EL$  con la retta  $AD$ , ed infine con  $H, K$ , rispettivamente, i piedi delle proiezioni di  $E, Z$  sopra le basi  $AB, GD$ . Grazie alla Proposizione 6 abbiamo

$$(9) \quad (XB + BN)^2 = (XH + NK)^2 + HK^2$$

e

$$(10) \quad EL^2 = (EM + ML)^2 = (EH + LK)^2 + HK^2 = (EH + ZK)^2 + HK^2.$$

Per la triangolare stretta e la condizione isoperimetrica, abbiamo

$$EL^2 < (EB + BL)^2 = (XB + BN)^2,$$

il che combinato con (9) e (10) implica

$$(11) \quad EH + ZK < XH + NK.$$

Dalla (11) e dal fatto che  $XH > EH$ ,<sup>20</sup> deduciamo che  $NZ < EX$ , da cui ricordando che  $GK < HB$  si ricava

$$NZ \cdot GK < EX \cdot HB,$$

il che prova che la variazione totale dell'area, nel passaggio dai due triangoli iniziali  $AEB, GZD$  ai due triangoli simili  $AXB, GND$ , è positiva. Ciò dimostra la tesi.  $\square$

**Proposizione 8.** *Siano  $AEB$  e  $GZD$  due triangoli isosceli come nella Proposizione 7.<sup>21</sup> Allora è possibile costruire due triangoli isosceli simili  $AXB$  e  $GND$  tali che  $AX + GN = AE + GZ$ .*

*Dimostrazione.* Trattandosi della costruibilità della coppia di triangoli isosceli simili ed isoperimetrici a quelli iniziali, la dimostrazione non è molto dissimile da quella della Proposizione 4. Con riferimento alla Figura 7, si considera  $\ell = 2(AE + GZ)$  e si determina l'unico  $x \in (0, \ell)$  tale che  $\frac{x}{\ell - x} = \frac{AB}{GD}$ , ovvero  $x = \frac{AB}{AB + GD} \ell$ . Si pone quindi  $\eta = x/2$  e  $\gamma = (\ell - x)/2$ . Osservando che  $\ell > AB + GD$ , si deduce  $x > AB$  e  $\ell - x > GD$ , da cui per le triangolari strette segue la costruibilità della coppia di triangoli isosceli sulle basi  $AB$  e  $GD$  aventi lati obliqui di misure  $\eta$  e  $\gamma$ , rispettivamente.  $\square$

**Proposizione 9\*.** Sia l'enunciato preciso che la dimostrazione di questa proposizione, citata esclusivamente in **PI**, sono perduti. Vedere la discussione nella sezione 4.

**Proposizione 10.** *Tra i poligoni di ugual perimetro e numero di lati, quelli regolari (equilateri ed equiangoli) hanno area massima.*

*Dimostrazione.* La dimostrazione, che assume tacitamente l'esistenza di poligoni ottimali,<sup>22</sup> si divide in due passi, il cui ordine è cruciale per poter applicare le proposizioni precedentemente dimostrate. Innanzi tutto (vedere la Figura 8) si prova che se un poligono  $ABGD \dots$  non è equilatero, allora è possibile costruire un altro poligono di ugual numero di lati ed isoperimetrico al primo, la cui area è maggiore. A tale scopo è sufficiente applicare la Proposizione 5 al triangolo  $ABG$  contenuto nel poligono iniziale, per il quale si suppone che  $AB \neq BG$ , ottenendo il nuovo poligono in cui il vertice  $B$

<sup>20</sup>Questo è un punto cruciale: il fatto che  $X$  stia sopra  $E$  segue dall'ipotesi di uguaglianza delle misure dei lati obliqui dei due triangoli iniziali.

<sup>21</sup>Qui riportiamo l'enunciato originale. In realtà la costruzione si può fare per una qualunque coppia di triangoli isosceli, anche nel caso in cui i lati obliqui non siano tutti congruenti.

<sup>22</sup>La questione è estremamente delicata. Infatti la dimostrazione zenodorea consiste nel far vedere che se un poligono non è regolare, allora non può essere ottimale, il che equivale all'implicazione "se un poligono è ottimale, allora è regolare". D'altra parte l'esistenza dei poligoni ottimali, benché molto intuitiva, è stata rigorosamente dimostrata solo attraverso i metodi dell'Analisi e del Calcolo delle Variazioni, sviluppati a fine '800.

viene sostituito da  $Z$ . Ciò mostra che l'area può essere massimizzata solo da poligoni equilateri. A questo punto si considera un generico poligono equilatero e, applicando la

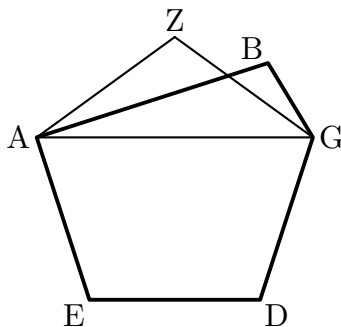


FIGURA 8. Se un poligono non è equilatero, allora non è ottimale.

Proposizione 7, si dimostra che qualora esso non sia equiangolo è di nuovo possibile costruire un poligono a lui isoperimetrico e con ugual numero di lati, avente area maggiore (vedi Figura 9). Si osservi come nella discussione della proprietà di equiangularità non

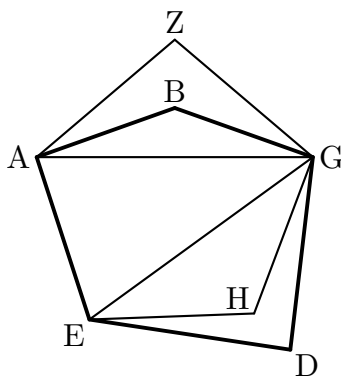


FIGURA 9. Se un poligono equilatero non è equiangolo, allora non è ottimale.

siano trattati i casi dei poligoni di 3 e 4 lati.<sup>23</sup> Naturalmente, ogni triangolo equilatero è automaticamente equiangolo, tuttavia l'esistenza di triangoli ottimali è da assumere implicitamente per rendere rigorosa la dimostrazione. Una situazione speciale si ha poi nel caso dei quadrilateri, per i quali non è nemmeno necessario assumere a priori l'esistenza di configurazioni ottimali. Infatti in questo caso, applicando 4 volte la Proposizione 5 ai triangoli individuati dalle diagonali, si può dimostrare che per ogni quadrilatero esiste un rombo ad esso isoperimetrico e di area non inferiore. In questo modo il problema viene ridotto alla classe dei *rombi*. Ora, è immediato verificare che tra tutti i rombi di perimetro fissato, il quadrato ha area massima. Infatti (Figura 10) è sufficiente decomporre il quadrato costruito su un lato di lunghezza  $\ell$  di un rombo in 5 parti: 4 triangoli rettangoli congruenti, i cui cateti corrispondono alle semidiagonali del rombo di lunghezze  $a < b$ , più un quadrato centrale di lato  $b - a$ . Ciò corrisponde all'uguaglianza

$$\ell^2 = a^2 + b^2 = 2ab + (b - a)^2,$$

<sup>23</sup>Solo nei poligoni equilateri con almeno 5 lati si possono individuare coppie di triangoli isosceli alle quali applicare la Proposizione 7 (si veda la Figura 9). D'altra parte, le proprietà isoperimetriche del triangolo equilatero e del quadrato erano probabilmente ben note, o quantomeno evidenti, all'epoca di Zenodoro; ciò spiegherebbe la mancanza della discussione di questi due casi. Un'altra spiegazione potrebbe essere l'interesse per il caso dei poligoni con un numero di lati elevato, visto che l'obiettivo ultimo della trattazione era quello di dimostrare la proprietà isoperimetrica del cerchio.

da cui segue che

$$2ab \leq \ell^2$$

e l'uguaglianza si ha se e solo se  $a = b$ , ovvero quando il rombo coincide con un quadrato. In questo modo abbiamo dimostrato che l'area del quadrato è maggiore di quella di ogni altro quadrilatero di pari perimetro, e più in generale (assumendo l'esistenza di configurazioni ottimali) che i poligoni di area massima, a parità di perimetro e numero dei lati, sono quelli regolari, ovvero equilateri ed equiangoli.

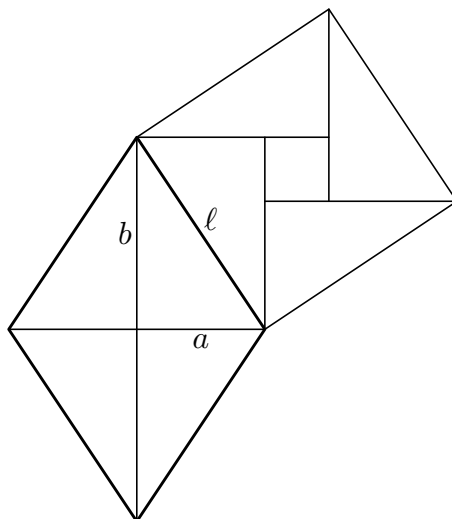


FIGURA 10. Tra i rombi isoperimetrici, il quadrato ha area massima (la proprietà non viene discussa nelle fonti).

□

#### 4. IL PROBLEMA DELLA COPPIA DI TRIANGOLI ISOSCELI OTTIMALI

Confrontando le fonti **PI**, **TI** e **AI** si nota una particolarità nella dimostrazione della Proposizione 7. Mentre **TI** e **AI** seguono la linea dimostrativa (corretta) presentata nella sezione precedente, che quindi può con relativa certezza essere riferita alla fonte originaria **Z\***, **PI** ad un certo punto sceglie di percorrere una via differente. Ciò potrebbe costituire un tentativo di Pappo di generalizzare la Proposizione 7,<sup>24</sup> oppure potrebbe trattarsi di un' *interpolazione*, cioè dell'inserimento di un ragionamento mancante da parte di un copista (o "interpolatore") successivo.

Benché sia difficile valutare quale delle due ipotesi sia corretta, sulla base dei pochi dati di cui disponiamo, è ragionevole propendere per la prima, ovvero che Pappo abbia effettivamente tentato una generalizzazione. Infatti, la rielaborazione della tradizione antica è una tendenza più volte riscontrata in Pappo (si veda a questo proposito [Cuo07]). A conferma di ciò, le opere matematiche tardo-ellenistiche (delle quali Pappo, Teone e Ipazia sono fra gli autori più importanti) constano principalmente di collezioni e commenti di risultati e trattati più antichi, primo fra tutti l'*Almagesto* di Tolomeo così come alcune opere di Archimede e di altri autori del primo periodo ellenistico (tra cui, appunto, Zenodoro). Del resto l'attività di rielaborazione era estremamente comune per i docenti dell'epoca, i quali svolgevano come attività principale l'insegnamento dell'eredità scientifica ormai appartenente a più di due secoli prima (si veda a questo proposito [Kli90]).

<sup>24</sup>Tuttavia nel testo originale il tentativo si configurerebbe come una semplice variante della dimostrazione zenodorea.

Nella fattispecie, inoltre, l'idea di generalizzare la Proposizione 7 doveva apparire alquanto naturale. L'affermazione contenuta nella tesi, infatti, può essere facilmente interpretata come una dichiarazione di ottimalità della configurazione formata dai due triangoli isosceli simili, rispetto al problema di massimizzare l'area a basi fissate e a parità di perimetro. Non dimentichiamo che la precedente procedura di "equilateralizzazione" dei poligoni, codificata nella Proposizione 5, consiste nel rimpiazzare una configurazione generica (un triangolo generico di base fissata) con una ottimale (il triangolo isoscele isoperimetrico con ugual base). Quello che, dalla successiva procedura di "equiangularizzazione", ci si potrebbe naturalmente aspettare è che, di nuovo, una configurazione generica (la coppia di triangoli isosceli dissimili su basi fissate) debba essere rimpiazzata da una ottimale. In realtà, se l'obiettivo è "equiangularizzare" un poligono equilatero, è sufficiente confrontare la configurazione iniziale (i due triangoli isosceli dissimili ma con lati obliqui congruenti) con quella finale (i due triangoli isosceli simili), stabilendo che la seconda è meglio della prima. Altra cosa è, invece, provare l'ottimalità dei due triangoli isosceli simili rispetto a tutte le altre coppie di triangoli isosceli isoperimetrici costruiti sulle stesse basi. Possiamo ragionevolmente supporre che Zenodoro non abbia sentito la necessità di chiarire questo punto (la sua dimostrazione è corretta) e quindi che Pappo abbia voluto aggiungere un proprio contributo originale per chiarire ed estendere il risultato.

La Proposizione 7P seguente, contenente l'affermazione più generale circa l'ottimalità di una coppia di triangoli isosceli simili, corrisponde alla Proposizione 7 così come viene enunciata in **PI**:

**Proposizione 7P (PI).** *Dati due triangoli isosceli dissimili AEB e GZD di basi AB e GD, e detti AXB e GND i triangoli isosceli simili costruiti sulle medesime basi, la cui somma dei perimetri eguaglia quella dei due triangoli iniziali, si ha*

$$\text{area}(AEB) + \text{area}(GZD) < \text{area}(AXB) + \text{area}(GND).$$

Per maggiore comodità del lettore, riscriviamo qui di seguito l'enunciato della Proposizione 7 dimostrata nella sezione precedente, mettendo in grassetto l'ipotesi aggiuntiva che caratterizza quest'ultima rispetto alla 7P.

**Proposizione 7.** *Dati due triangoli isosceli AEB e GZD di basi AB e GD diseguali, i cui lati obliqui sono congruenti ( $AE = GZ$ ), e detti AXB e GND i triangoli isosceli simili costruiti sulle medesime basi, la cui somma dei perimetri eguaglia quella dei due triangoli iniziali, si ha*

$$\text{area}(AEB) + \text{area}(GZD) < \text{area}(AXB) + \text{area}(GND).$$

La dimostrazione della Proposizione 7P fornita in **PI** corrisponde essenzialmente a quella della Proposizione 7 in **TI** e **AI**, fino al punto in cui si dimostra la (11), ovvero che

$$EH + ZK < XH + NK.$$

Da qui in poi **PI** si discosta dalle altre due fonti e, senza fare riferimento alla proprietà derivante dalle ipotesi della Proposizione 8 (quest'ultima identica in tutte e tre le fonti) ovvero che il punto  $X$  sta sopra al punto  $E$  come in Figura 7 (conseguenza del fatto che i lati obliqui sono congruenti), procede facendo riferimento ad un risultato sulle proporzioni composte, purtroppo perduto - esattamente quello che in precedenza abbiamo indicato come Proposizione 9\*. Da esso seguirebbe la validità della seguente implicazione, presente nel testo di **PI** e qui riportata in termini moderni: *siano verificate le proporzioni*

$$(a_1 + b_1) : (a_2 + b_2) = (A_1 + B_1) : (A_2 + B_2).$$

Purtroppo (o per fortuna!) tale implicazione, che Pappo utilizza nel suo tentativo di completare la dimostrazione della Proposizione 7P, è in generale **falsa**.<sup>25</sup> È curioso notare come questo passaggio, descritto già da Hultsch [Hul78] e successivamente da Heath [Hea21] come lacunoso nei manoscritti superstiti, non sia stato indagato in profondità da questi studiosi. Per rendere meglio l'idea, Heath a proposito di questo passo dice: “...it would seem that Pappus used the relations...in order to prove the proposition (cfr. la Proposizione 9\*)...The proof of this proposition, whatever it was, Pappus indicates that he will give later; but in the text as we have it the promise is not fulfilled”. Un analogo commento si trova anche in Hultsch (in latino, quindi omettiamo la trascrizione del passo).

A questo punto, al lettore non può che rimanere il dubbio, non tanto sull'enunciato della fantomatica Proposizione 9\* (come abbiamo già detto, da essa si dovrebbe dedurre una conclusione manifestamente falsa!), quanto sulla validità della Proposizione 7P. Né Hultsch, né Heath chiariscono la faccenda, anzi la liquidano senza porsi ulteriori domande.

Ci proponiamo, ora, di chiarire la questione che riguarda la Proposizione 7P (si veda anche [Coo63]). A questo proposito, utilizziamo il calcolo differenziale per individuare la configurazione ottimale. È opportuno descrivere una generica configurazione di due triangoli isosceli costruiti su basi fissate di ampiezza  $2a$  e  $2b$ , rispettivamente, la somma  $2s$  dei cui lati obliqui è una data costante (ovviamente  $s > a + b$ ), in termini di parametri opportuni. Introduciamo pertanto il parametro  $\alpha$  tale che  $2\alpha$  sia la misura dell'angolo al vertice del primo triangolo, quello opposto alla base di lunghezza  $2a$ . Quindi scriviamo l'area complessiva dei corrispondenti triangoli isosceli i cui lati obliqui danno per somma  $2s$ . Indicando con  $h_a$  ed  $h_b$  le altezze dei due triangoli, in corrispondenza delle basi  $2a$  e  $2b$ , avremo

$$h_a = \frac{a}{\tan \alpha}, \quad h_b = \sqrt{\left(s - \frac{a}{\sin \alpha}\right)^2 - b^2},$$

quindi l'area totale è data da

$$A(\alpha) = ah_a + bh_b = \frac{a^2}{\tan \alpha} + b\sqrt{\left(s - \frac{a}{\sin \alpha}\right)^2 - b^2}.$$

Derivando otteniamo

$$\frac{d}{d\alpha}A(\alpha) = -\frac{a^2}{\sin^2 \alpha} + ab \frac{\left(s - \frac{a}{\sin \alpha}\right) \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha}}{h_b},$$

quindi ponendo  $2\beta =$  misura dell'angolo al vertice del triangolo isoscele di base  $2b$ , con qualche semplice passaggio algebrico segue che la derivata dell'area si annulla se e solo se vale la condizione di equilibrio

$$(12) \quad \frac{\cos \alpha}{a} = \frac{\cos \beta}{b}.$$

La condizione qui trovata ricorda molto la legge di Snell–Fermat sul fenomeno ottico della rifrazione; in seguito daremo una interpretazione geometrica della (12), che per quanto ci risulta non è stata osservata in precedenza. Derivando ulteriormente si può dimostrare che il punto critico per la funzione area totale  $A(\alpha)$  è anche l'unico punto di massimo assoluto. Quindi la condizione di equilibrio (12) individua univocamente la configurazione ottimale per i due triangoli isosceli. Fatta eccezione per il caso  $a = b$  (che peraltro non si verifica in generale, neppure nella dimostrazione della Proposizione 7 come correttamente fornita in **TI** e **AI**) in tutti gli altri casi la coppia ottimale **non** è data da due triangoli isosceli simili (per i quali  $\alpha = \beta$ ), ma da due opportuni triangoli isosceli dissimili.

<sup>25</sup>Si provi ad esempio con  $a_1 = A_1 = b_1 = B_1 = a_2 = 1$ ,  $b_2 = A_2 = 2$  e  $B_2 = 4$ .



In conclusione, abbiamo scoperto che *una coppia di triangoli isosceli simili non massimizza quasi mai*<sup>26</sup> *l'area a parità di perimetro*, dunque che...la Proposizione 7P è in generale **falsa**! Questo fatto non solo è controintuitivo, ma anche apparentemente contraddittorio rispetto alla conclusione stessa del teorema isoperimetrico di Zenodoro. Come è infatti possibile che si arrivi a dimostrare l'equiangularità dei poligoni ottimali, dal momento che una coppia di triangoli isosceli simili (dunque equiangulari!) non è quasi mai ottimale? Alla luce delle informazioni trasmesse dalle tre fonti, è assai improbabile che questo fatto sorprendente fosse stato osservato da Pappo, e tantomeno da Zenodoro. L'idea intuitiva, infatti, è un'altra: la proprietà che caratterizza i triangoli simili è parente stretta dell'equiangularità che, come sappiamo in virtù della Proposizione 7 (e non della 7P, che abbiamo riconosciuto essere falsa), si riscontra nei poligoni regolari, che appunto sono ottimali per il problema isoperimetrico. Era quindi abbastanza naturale congetturare la validità della Proposizione 7P. Tuttavia, la risposta al problema è, in realtà, decisamente controintuitiva. Abbiamo peraltro dovuto utilizzare gli strumenti del calcolo differenziale, naturalmente non disponibili all'epoca di Pappo, per individuare la giusta condizione di ottimalità.

Ciò nonostante, è opportuno sottolineare come la Proposizione 7 e la sua dimostrazione dovuta a Zenodoro, a differenza della Proposizione 7P, sia indubbiamente corretta. Fatta salva la questione dell'esistenza dei poligoni ottimali, possiamo in sintesi affermare che *l'ottimalità dei poligoni regolari isoperimetrici venne dimostrata da Zenodoro utilizzando una configurazione quasi sempre sub-ottimale, ovvero quella dei due triangoli isosceli simili*. Che l'elegante dimostrazione isoperimetrica di Zenodoro eviti “per un pelo” la difficoltà insita nel problema dei due triangoli isosceli ottimali, sembra davvero miracoloso!

A questo punto, per svelare ulteriormente il mistero attorno alla configurazione ottimale dei due triangoli isosceli, illustriamo il significato geometrico della (12). Per far ciò è opportuno dimostrare la seguente, semplice proposizione.

**Proposizione 11.** *Dato un triangolo isoscele  $ABG$  la cui base  $AB$  misura  $2a$  ed il cui angolo al vertice  $G$  è pari a  $2\alpha$ , il rapporto  $\frac{\cos \alpha}{a}$  coincide con la curvatura dell'arco di circonferenza passante per  $A$  e  $B$ , ed ivi tangente ai due lati obliqui del triangolo.*

*Dimostrazione.* In riferimento alla Figura 11, osserviamo come la misura  $r$  del raggio  $CB$  dell'arco tangente in  $A$  e  $B$  ai lati  $AG$  e  $BG$  coincida con  $\frac{a}{\cos \alpha}$ , in quanto  $\widehat{HGB} = \widehat{HBC}$ . Tenendo presente che la curvatura dell'arco di circonferenza è definita come l'inverso del suo raggio, ciò conclude la dimostrazione.  $\square$

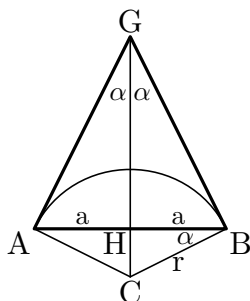


FIGURA 11. Il significato geometrico della (12): la costanza della curvatura (ovvero del raggio  $r$ ) della circonferenza tangente.

<sup>26</sup>Per la precisione mai, eccetto nel caso in cui i triangoli siano congruenti.

Dalla Proposizione 11 si ottiene la seguente caratterizzazione geometrica della (12), ovvero *l'uguaglianza delle curvature delle "circonferenze tangenti" ai due triangoli isosceli ottimali*. In questo senso si ritrova una condizione di equilibrio caratteristica dei problemi isoperimetrici: la curvatura (media) costante. Possiamo a questo punto interrogarci su quale poteva essere la difficoltà per gli scienziati antichi nel trovare (e dimostrare!) una simile proprietà. Sottolineiamo ancora una volta che la (12) è stata qui individuata utilizzando strumenti del calcolo differenziale, e che solo a posteriori l'abbiamo riformulata in termini geometrici di uguaglianza tra curvature di circonferenze tangenti.

Esiste una dimostrazione sintetica della (forma geometrica della) (12), che utilizzi esclusivamente gli strumenti disponibili all'epoca di Pappo? O invece le tecniche del moderno calcolo differenziale sono imprescindibili per dedurre tale proprietà? Al momento questo problema è aperto, tuttavia abbiamo varie ragioni per credere che una dimostrazione sintetica della (12) debba potersi trovare. Lasciamo al lettore interessato il piacere di (ri?)scoprire tale dimostrazione, forse mai trovata prima oppure, chissà, perduta assieme al trattato di Zenodoro.

#### RINGRAZIAMENTI

Dedico questo lavoro all'amico Mimmo, alla sua passione per la ricerca e per l'insegnamento e la divulgazione della matematica, alla sua curiosità e alla sua libertà. Ringrazio Italo Tamanini, Franca Cattelani e Silvia Bolgherini per i loro preziosi commenti e suggerimenti. Infine, un grazie a Cesare Borgni e alla biblioteca di Piombino-Riotorto (Livorno) per il recupero del primo volume dell'opera di Hultsch, nell'estate 2012.

#### BIBLIOGRAFIA

- [ABBDV83] Achille Adriani, Giuseppina Barone, Nicola Bonacasa, and Antonino Di Vita. *Alessandria e il mondo ellenistico-romano: studi in onore di Achille Adriani*, volume 1. L'Erma di Bretschneider, 1983.
- [BT97] Gemma Beretta and Franco Trabattoni. *Ipazia di Alessandria. Rivista di Storia Della Filosofia*, 1997.
- [Coo63] Julian Lowell Coolidge. *A history of geometrical methods*. Oxford: Clarendon Press (1940). Reprint Edition. New York: Dover, 1963.
- [Cuo07] Serafina Cuomo. *Pappus of Alexandria and the mathematics of late antiquity*. Cambridge University Press, 2007.
- [Dij87] Eduard Jan Dijksterhuis. *Archimedes*. Princeton University Press, New Jersey, 1987.
- [Fra92] Craig G Fraser. Isoperimetric problems in the variational calculus of Euler and Lagrange. *Historia mathematica*, 19(1):4–23, 1992.
- [Gol80] Herman Heine Goldstine. *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century*. Springer, 1980.
- [Hea21] Thomas Little Heath. *A History of Greek Mathematics*, volume 1-2. Oxford: Clarendon Press, 1921.
- [Hei98] Johan Ludvig Heiberg. *Claudii Ptolemaei Opera quae exstant omnia*, volume 1. In aedibus BG Teubneri, 1898.
- [Hul78] Friedrich Hultsch. *Pappus of Alexandria. Collectionis quae supersunt*, volume 1-3. Berlin: Weidmann (repr. Amsterdam: A.M. Hakkert, 1965), 1876-78.
- [Kli90] Morris Kline. *Mathematical thought from ancient to modern times*, volume 1. Oxford University Press, 1990.
- [Kno89] Wilbur Richard Knorr. *Textual studies in ancient and medieval geometry*. Springer, 1989.
- [LT09] Domenico Luminati and Italo Tamanini. *Problemi di massimo e di minimo*. Mimesis, 2009.
- [Rom36] Adolphe Rome. *Commentaires de Pappus et de Théon d'Alexandrie sur l'Almageste*, volume I-II. Biblioteca apostolica vaticana, 1931;1936.
- [Rus01] Lucio Russo. *La rivoluzione dimenticata: il pensiero scientifico greco e la scienza moderna*. Feltrinelli Editore, 2001.

- [Ste38] Jacob Steiner. Einfache beweise der isoperimetrischen hauptsätze. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 18:281–296, 1838.
- [Too72] Gerald J Toomer. The mathematician Zenodorus. *Greek, Roman, and Byzantine Studies*, 13(2):177–192, 1972.
- [Too98] Gerald J Toomer. *Ptolemy's Almagest*. Princeton University Press, 1998.

DIPARTIMENTO DI SCIENZE FISICHE, INFORMATICHE E MATEMATICHE, UNIVERSITÀ DI MODENA E REGGIO EMILIA, VIA CAMPI 213/B, 41100 MODENA, ITALY